

15 गणित की रचनात्मक भाषा

स्नेहा टाइटस

विश्वविद्यालय–पूर्व स्तर पर गणित पढ़ाने को हमेशा से एक ऐसी बेगार के बतौर देखा जाता रहा है जो विद्यार्थियों द्वारा उन महत्वपूर्ण परीक्षाओं को तवज्जो दिए जाने के चलते हमेशा दरकिनार होती रहती है जिन पर विद्यार्थियों को हर ओर से यही सलाह मिलती है कि यह *या तो तुम्हारी जिन्दगी बना देगी या फिर उसे बिगाड़ कर रख देगी* । तिस पर आप इसमें जोड़ दीजिए तमाम विषयों से लदे आई.एस.सी. पाठ्यक्रम और हाईस्कूल गणित से ऊँची छलाँग में लगने वाली कड़ी मेहनत! कोई आश्चर्य नहीं कि इस सबके चलते नवाचार और रचनात्मकता को ठण्डे बस्ते में डलवा दिया जाता है और फिर सारा ध्यान, विद्यार्थियों को अपनी 'जिन्दगी बनाने' के लिए तैयार करने में खर्च कर दिया जाता है। पर क्या आप नए पन और सृजन के बगैर किशोरावस्था की कल्पना कर सकते हैं? क्या हम उनसे यह नहीं सुनना चाहेंगे कि उस विषय को लेकर वे क्या सोचते हैं जो हम उन्हें पढ़ाते हैं? विद्यार्थी चाहते हैं कि उनके विचार दूसरों द्वारा सुने जाएँ। और जब कक्षा में इस बात की गुंजाइश न बनती हो तो पाठ्यक्रम की शुरुआत, लेखन अभ्यास से करने पर मुझे अपने विद्यार्थियों का परिचय कमोबेश जल्दी मिल जाता है। ऐसे में सबसे पहले तो मैं उनसे एक निबन्ध ऐसा लिखवाती हूँ जो उन्हें अपने गणित के अनुभवों और उसके प्रति उनके रवैये को सबसे साझा करने के लिए प्रेरित करता है। ऐसा ही एक निबन्ध साल 2001 की फिल्म 'अ ब्यूटीफुल माइण्ड' को लेकर था। मैंने इस उद्धरण का इस्तेमाल किया – "वह टाई कितनी बुरी है! इस बात का एक गणितीय कथन तो होना ही चाहिए।" मैंने विद्यार्थियों से पूछा, "क्या आप जॉन नैश के इस बुनियादी विचार से सहमत हैं कि गणित सर्वव्यापी है? किन्हीं अनपेक्षित स्थितियों में गणित के साथ हुई आपकी कुछ अचानक मुलाकातों के बारे में लिखिए।" जब अपने घर से दूर रह रहे एक अन्तर्राष्ट्रीय विद्यार्थी ने अपने अल्पसंख्यक होने की बात कही और बताया कि किस प्रकार उसकी भावनाओं का रिश्ता तादाद से बनता है तभी मैं समझ गई कि इस अभ्यास ने वह कमाल कर दिखाया है जो कोई कॉउन्सलर न कर सका – किसी किशोर लड़के को अपनी भावनाओं के बारे में बात करने के लिए तैयार कर पाना! कई विद्यार्थी गणित के प्रति नकारात्मक भावनाएँ रखते हैं। सो इस सच्चाई को 'कड़वी लेकिन अच्छी दवा' की तरह बरतने की बजाय उसे स्वीकार करते हुए सम्बोधित करना जरूरी होगा।

लिखने से तार्किक विचार और एक वाजिब तर्क को प्रस्तुत करने का कौशल विकसित होता है और गणित में इन दोनों ही कौशलों को बहुत मान दिया जाता है। इसीलिए, मैं शैक्षिक सत्र के दौरान प्राय: अँग्रेजी अध्यापक के साथ मिलकर लेखन अभ्यास का सहारा लेती हूँ। हम दोनों, लेखन कौशल व गणितीय शुद्धता के हिसाब से उस अभ्यास विशेष को परखते हैं। एक बार मैंने एक्सपोनेंशियल फंक्शन (घातीय फलन) e^x पर आधारित एक अभ्यास का चयन किया। इस फलन का एक विशेष गुणधर्म यह है कि इस फलन का व्युत्पन्न (परिवर्तन की दर) स्वयं फलन के बराबर ही होता है। लगता है इसी फलन से प्रेरित होकर गणितज्ञ जॅकब बर्नोली ने अपना मरसिया कुछ यूँ रचा था, "बदल गया हूँ, पर उठूँगा जरूर।" एक्सपोनेंशियल फंक्शन और उसका विलोम (लॉगॅरिथ्मिक फंक्शन) पढ़ने के बाद, विद्यार्थियों ने "बदल गया हूँ , पर उठूँगा भी जरूर।" वाक्यांश पर एक निबन्ध लिखा। अभ्यास के चलते विद्यार्थियों की आविष्कार–प्रवृत्ति, रचनात्मकता, वैयक्तिकता तथा परिवर्तन की प्रकृति की एक गहरी समझ उभरकर आई। निस्संदेह, गणितीय अनुशासन के साथ–साथ हमें उपरोक्त कौशल भी विकसित करने होंगे।

गणितीय सौंदर्य को दर्शाने के अनेक उदाहरणों में से एक है संख्याओं की एक श्रेणी। एक तरफ जहाँ इनमें कलात्मक पैटर्न देखे जा सकते हैं वहीं दूसरी ओर अक्सर दबाव में काम करने वाले विद्यार्थियों के पास इस खूबसूरती को ठहरकर देखने और समझ पाने का समय ही नहीं होता सो उन्हें यह सब, संख्याओं का एक ऐसा व्यूह दिखाई पड़ता है, जिसका उनके वर्तमान जीवन से कहीं से भी कोई नाता नहीं बनता। किसी श्रेणी का जोड़ निकालना खासतौर पर कठिन होता है। वैसे तो किसी अंकगणितीय श्रेणी (अरिथमेटिक सीक्वेंस) या ज्यामितीय श्रेणी (ज्यॉमेट्रिक सीक्वेंस) के योग के लिए आवश्यक सूत्र विकसित और याद किए जा सकते हैं लेकिन ग्यारहवीं कक्षा के विद्यार्थियों से उन श्रेणियों के जोड़ निकालने को कहा जाता है जिनकी संख्याओं का अन्तर अंकगणितीय या ज्यामितीय श्रेणी में होता है। मसलन, अंक श्रेणी 1+3+6+10+15+-------सम्भवत: अब तक आपने जान ही लिया होगा कि श्रेणी का अगला पद 21 है, इसलिए कि एक–के–बाद–एक करके संख्याओं के बीच का अन्तर यूँ बढ़ता जाता है 2, 3, 4, 5 इत्यादि। एक तरफ जहाँ, किसी उत्साही गणितप्रेमी को श्रेणी के n वें पद की अभिव्यक्ति पाने और n पदों के योग की गणना करने में भी बड़ा मजा आता वहीं दूसरी तरफ विषय में अभी नए दाखिल हुए विद्यार्थियों को धड़ाधड़ सिद्धान्त पढ़ाना भी अक्सर मुश्किल होता है। इसीलिए एक बार जब दिसम्बर के महीने में यह विषय पढ़ाने का संयोग बना तो मुझे एक छात्रा को यह कहने में बिलकुल भी हिचक नहीं हुई कि वह क्रिसमस गीत को आधार बनाकर इस सवाल की इबारत बनाए। n पदों का योग जानने की बजाय उसके सामने चुनौती थी संख्याओं को जोड़े बिना यह जानना कि गायिका को उसके 'असली प्रेमी' द्वारा कुल कितने उपहार भेजे गए।

इस सन्दर्भ में मेरे द्वारा इस्तेमाल किए गए उत्प्रेरक प्रश्न थे –

- किस आधार पर यह एक श्रेणी है?
- कौन–कौन–सी श्रेणियाँ आप पहचान सकते हैं?
- अगर उसे हर दिन उपहारों का नया सेट मिला हो तो कुल मिलाकर लड़की को कितने उपहार मिले होंगे? (जैसा कि गीत में कहा गया है)
- अब यदि उस लड़की को हर दिन पुराने सेटों के संग्रह के साथ एक नया सेट भी मिले तो ऐसे में उसे कुल जमा कितने उपहार सेट मिलेंगे? (जैसा कि कोरस कहता है)

परिणामस्वरूप, नन्हे–नन्हे उपहारों से सुसज्जित एक सुन्दर बुलेटिन बोर्ड विकसित हुआ लेकिन सबसे महत्वपूर्ण वह पैटर्न था जो इन उपहारों से उभरकर आया था। इसी पैटर्न के बल पर उसे Tn (श्रेणी का n वाँ पद) और Sn (श्रेणी के n वाँ पदों का योग) के बीच का फर्क समझ आया और वह $Sn - 1/6\,(n)\,(n+1)\,(n+2)$ सूत्र की व्याख्या कर पाई। फिर जब उसने गणना के द्वारा उपहारों की कुल संख्या 364 बताई तब तो फिर इस बात पर गर्मागर्म बहस छिड़ गई कि साल के हर दिन एक उपहार पाना बेहतर होगा या क्रिसमस के 12 दिनों में इस विशेष सत्कार के द्वारा सारे 364 उपहार एक साथ पाना।

बारहवीं कक्षा का अन्त आते–आते, अवकल समीकरण (डिफ्रन्शियल इक्वेशन्स) नामक अध्याय में विद्यार्थियों से फलन (फंक्शन), अवकलन व समाकलन गणित (डिफ्रन्शियल व इन्टीग्रल कैल्कुलस) में उन्हें पढ़ाए गए अब तक के कमोबेश सारे गणित कर पाने की उम्मीद रखी जाती है। वे इसे पिछले दो सालों में अपने द्वारा की गई सारी मेहनत की पराकाष्ठा के बतौर देखते हैं, लेकिन सच्चाई तो यह है कि अपने द्वारा पढ़े और सीखे गए इस गणित का असल जीवन में इस्तेमाल करने से पहले उन्हें अभी और लम्बी यात्रा करनी पड़ेगी। लेकिन इस सारी कवायद से निश्चित ही उन्हें वास्तविक जीवन की स्थितियों से दो–चार होने और उनके गणितीय मॉडल बनाने का सलीका आ जाता है। और इसके लिए मर्डर मिस्ट्री (हत्या रहस्यकथा) से बढ़कर भला और क्या उदाहरण हो सकता है? अवकलन समीकरणों की भूमिका के बतौर यह सवाल मैंने कइयों बार इस्तेमाल किया है। (एक बार तो पूरी तरह से भयावह बुलेटिन बोर्ड सहित)।

,d lqg yxHkx 3 ct sQ¨u ds}kjk iqfyl d¨ ml ?kj ij cqyk;k tkrk gSt gk¡ gR;k ds ,d f'kdkj dh yk'k iM+h gSA iqfyl MkWDVj lqg 3-45 ct si gq¡pdj eŕ nsg dk rkieku yrs k gS& 34-5 fMxzh lsfYl ;lA ,d ?k.Vs ckn MkWDVj fQj ls rkieku yrs k gSt¨ fd 33-9 fMxzh ls ik;k tkrk gSA dejs dk rkieku yxHkx leku 15-5 fMxzh ls jgk vkrk gSA 'khr yu lEcU/kh U;wVu dk fu;e dgrk gSfd 'kjhj dsB.Ms g¨usdh nj] 'kjhj dsrkieku v©j vkl ikl ds okrkoj.k ¼gok½ dsrkieku dsvUrj dslekuqikrh g¨rh gSA U;wVu ds'khryu fu;e d¨ ekud ekursgq, eŕd dsejus dsle; dk vkdyu dhft,A ¼ekuo ds 'kjhj dk lkekU; rkieku 37-0 fMxzh ls g¨rk gSA½

(यह उदाहरण अभ्यास एम.ई.आई. स्ट्रक्चर्ड मैथमॅटिक्स से साभार उद्धृत)

इस सवाल को हल करने के लिहाज से निम्न बातें अनिवार्य हैं –

- दिए गए आँकड़ों के द्वारा एक गणितीय मॉडल बनाना
- सीमा शर्तें तय करना
- अवकलन समीकरणों में प्रयुक्त प्रतीकों को समझना
- किसी अवकलन समीकरण को हल करने के लिए परिवर्तियों के वियोजन की विधि का ज्ञान
- $\int 1/x\, dx$ and $\int 1/(x-a)\, dx$ के समाकलन का ज्ञान

शुरुआत में, नियत सीमा शर्तों के आधार पर अनुपातता व समाकलन के स्थिरांकों की गणना से विद्यार्थी अनभिज्ञ होते हैं। लेकिन दिलचस्प बात तो यह थी कि हरेक अध्याय के बाद वे लोग, समाधान के थोड़ा और करीब पहुँच जाते। अभ्यास का अन्त आते–आते मृत्यु के अनुमानित समय सम्बन्धी गणनाएँ कक्षा में यहाँ–वहाँ उड़ने लगीं। लेकिन सेहरा उसी के सिर बँधा जिसने समाधान का सम्पूर्ण तर्क प्रस्तुत किया और जिसने सही हल तक पहुँचने की प्रक्रिया के दौरान सारे जरूरी गणितीय कदम उठाए। इस तमाम कवायद की सबसे अहम बात यह है कि समाधान तक पहुँचने की सारी प्रक्रिया में विद्यार्थी, समाकलन के स्थिरांकों जैसी प्रत्यक्षत: मामूली दिखने वाली जानकारियों, किसी फलन के बढ़ने की दर और मृत्यु के समय पर पड़ने वाले उसके प्रभाव, गणित द्वारा प्रदत्त सुविधाएँ (जैसे कि गणना के सन्दर्भ में समय का शुरुआती बिन्दु यानी कि $t = 0$ चुनने की सुविधा), स्वतन्त्र व निर्भर चर संख्याओं का तात्पर्य आदि आदि। समस्या सुलझाने से बेहतर और कोई तरीका नहीं हो सकता, फिर चाहे आप बच्चों से कितनी भी परिभाषाएँ क्यों न लिखवा लें।

हाल में, डाइनेमिक ज्यॉमेट्री सॉफ्टवेअर व ग्राफिंग कैल्कुलेटर्स का इस्तेमाल कर टेक्नॉलॉजी–कुशाग्र शिक्षक अपनी गणित कक्षाओं में विज्युअल पक्ष भी ले आए हैं। इनसे विद्यार्थी न सिर्फ स्वतन्त्र रूप से गणितीय अन्वेषण कर पाने में सक्षम होते हैं बल्कि गणित की गूढ़ पदावली का असल आशय भी समझ पाते हैं। हालांकि, इतनी मात्रा में टेका देने वाला ऐसा एक गणितीय अनुसन्धान प्रयोग रच पाना जिसमें कि कोई भी विद्यार्थी स्वतन्त्र रूप से बिना किसी की मदद के अपना काम कर सके, अध्यापक से कुछ हुनर कुछ चतुराई की उम्मीद रखता है। लेकिन ऐसी गतिविधियाँ ही विशिष्ट प्रकार की (प्रयोग आधारित) शिक्षा की गुंजाइश देती हैं जिसमें विविध प्रकार की बुद्धिमत्ताएँ प्रयोग में आती हैं। अपनी रचनात्मकता को प्रयोग में लाने और कक्षा में नवाचार कर सकने का इससे बेहतर सबब भला और क्या हो सकता है?



स्नेहा *अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन के साथ काम करती हैं। इसके साथ ही वे, ग्रामीण व शहरी स्कूलों के शिक्षकों का मार्गदर्शन भी करती हैं। विद्यार्थियों व शिक्षकों को प्रोत्साहित करने व उन्हें सिखाने के हिसाब से वे, आधुनिक टेक्नॉलॉजी से लैस शैक्षिक विधियों व गेम्स, पहेलियों और कथाओं का इस्तेमाल करती हैं। अपने 20 साल लम्बे पूर्णकालीन अध्यापकीय जीवन को छोड़ स्नेहा, हर आयु वर्ग के विद्यार्थियों में लॉजिक (तर्क विज्ञान) व गणित के प्रति एक अनुराग जगाने के महत्वपूर्ण काम में लगी हैं। उनसे* sneha.titus@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है।* ***अनुवाद*** *: मनोहर नोतानी*